Chapitre 12. Réduction des endomorphismes

1 Sous-espaces stables. Polynômes d'endomorphisme

1.1 Exemples de sous-espaces stables

Définition 1.1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E
On dit que F est stable sous u su $u(F) \subset F$
On note alors u_F l'induit de u sur F

Proposition 1.2. Si $P \in K[X]$, $P(u)$ laisse stable F et $\boxed{P(u)_F = P(u_F)}$

1.2 Exemples de sous-espaces stables

- Premier type : Soit E un K-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$, $e \in E$
  Alors $F_e = \underset{k\in\mathbb{N}}{\text{Vect}}(u^k(e))$ est un sev stable par u, c'est même le plus petit sev stable contenant e
- Deuxième type : $\ker P(u)$ et $\text{im}\, P(u)$

Proposition 1.3. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ aveec $u \circ v = v \circ u$
Alors $\ker v$ et $\text{im}\, v$ sont stables par u

Corollaire 1.4. Soit E un K-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in K[X]$
Alors $\ker P(u)$ et $\text{im}\, P(u)$ sont stables par u

1.3 Théorème de décomposition des noyaux

Théorème 1.5 (Théorème de décomposition des noyaux).
Soit E un K-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in K[X]$ Premiers entre eux.
Alors

$$\boxed{\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)}$$

Corollaire 1.6. Soit E un K-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, ..., P_r \in K[X]$ premiers entre eux 2 à 2
Alors

$$\boxed{\ker P_1 P_2 ... P_r(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u)}$$

1.4 Polynôme minimal d'un endomorphisme

Théorème 1.7. Soit E est de dimension finie et $\Phi : \begin{cases} K[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{cases}$ un morphisme d'algèbres.
Alors $\ker \Phi \neq \{0\}$ et il existe un unique polynôme unitaire μ_u (ou π_u) tel que $\ker \Phi = \mu_u K[X]$
Si $P \in K[X]$ alors $P(u) = 0 \iff \mu_n \mid P$
μ_u est donc le polynôme unitaire de plus petit degré (non nul) qui annule u
Par ailleurs $\text{im}\, \Phi = K[u] = \underset{k\in\mathbb{N}}{\text{Vect}}(u^k)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ (commutative)
de dimension $\deg \mu_u = d$ et de base $(\text{Id}, u, ..., u^{d-1})$

Définition 1.8. Avec ces notations, μ_u s'appelle polynôme minimal de u

Proposition 1.9. Si E de dimension finie

- $\boxed{\mu_u = 1 \iff E = \{0\}}$
- $\boxed{\mu_u = X - \lambda \iff u = \lambda \text{Id}_E,\ E \neq \{0\}}$

Théorème 1.10. Soit $A \in M_n(K)$
Alors $\Phi : \begin{cases} K[X] \to M_n(K) \\ P \mapsto P(A) \end{cases}$ est un morphisme d'algèbres non injectif.
Donc $\ker \Phi$ est un idéal différent de $\{0\}$ qui s'écrit $\mu_A K[X]$
Si $P \in K[X]$, $P(A) = 0 \iff \mu_A = P$
et μ_A est donc le polynôme unitaire différent de 0 de plus petit degré annulant A
Par ailleurs, si $d = \deg \mu_A$, $K[A]$ est une sous-algèbre commutative de $M_n(K)$ de dimension d, de base $(\mathrm{Id}, A, ..., A^{d-1})$

Définition 1.11. μ_A est appelé polynôme minimal de A (aussi noté μ_A)

1.5 Racines de polynôme minimal

Proposition 1.12. Soit E un K-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$, $Q \in K[X]$
Si (e, λ) un couple propre de u alors

$$\boxed{Q(u)(e) = Q(\lambda)e}$$

Proposition 1.13.

- Soit E un K-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, P un polynôme annulateur de u, $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$
  Alors λ est racine de P : $\mathrm{Sp}_u \in Z(P)$
- Soit $A \in M_n(K)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $P \in K[X]$ avec $P(A) = 0$
  Alors λ est racine de P

Proposition 1.14.

- Soit E un K-ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$
  Les racines de μ_u sont exactement les valeurs propres de u

$$\boxed{\mathrm{Sp}\, u = Z(\mu_u)}$$

- Soit $A \in M_n(K)$
  Les racines de μ_A sont exactement les valeurs propres de A

$$\boxed{\mathrm{Sp}\, A = Z(\mu_A)}$$

2 Diagonalisabilité

2.1 Endomorphismes diagonalisables

Définition 2.1. Soit E un K-ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$
On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D_n(K)$$

Autrement dit, s'il existe une base de vecteurs propres.

Théorème 2.2. Soit E un K-ev de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$
Les 5 conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable.

(ii) Il existe $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ 2 à 2 distincts tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker\left(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E\right)$$

(iii) Il existe $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ 2 à 2 distincts tels que

$$\prod_{i=1}^{r} \left(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E\right) = 0$$

(iv) Il existe $P \in K[X]$ scindé à racines simples annulant u

(v) μ_u est scindé à racines simples.

Dans ces conditions

$$\boxed{E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \ker\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)}$$

$$\boxed{\mu_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} (X - \lambda)}$$

(On dit que "la somme des sev propres rejoint E")

Proposition 2.3. Soit E un K-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sev de E stable par u
Alors u_F est aussi diagonalisable et $\boxed{\mu_{u_F} \mid \mu_u}$

2.2 Matrices carrés diagonalisables

Définition 2.4. Soit $A \in M_n(K)$
A est diagonalisable si $u_A : \begin{cases} K^n \to K^n \\ X \mapsto AX \end{cases}$ est diagonalisable.

Proposition 2.5. Soit $A \in M_n(K)$
Alors A diagonalisable $\iff$ A est semblable à une matrice diagonalisable.

Proposition 2.6. Soit $A \in M_n(K)$
Les 5 conditions suivantes sont équivalents :

(i) A est diagonalisable.

(ii) Il existe $P \in GL_n(K)$ tel que $P^{-1}AP \in D_n(K)$

(iii) Il existe $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ 2 à 2 distincts tels que

$$K^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker\left(A - \lambda_i I_n\right)$$

(iv) Il existe $Q \in K[X]$ scindé à racines simples annulant A

(v) μ_A est scindé à racines simples.

Dans ces conditions

$$\boxed{K^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \ker\left(A - \lambda I_n\right)}$$

$$\boxed{\mu_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} (X - \lambda)}$$

Proposition 2.7. Soit E un K-ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ base de E et $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$

Alors $\boxed{u \text{ diagonalisable } \iff A \text{ diagonalisable}}$

Proposition 2.8. Soit

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

Alors

$$\boxed{M \text{ diagonalisable } \iff A_1, ..., A_r \text{ diagonalisable}}$$

2.3 Diagonalisabilité du polynôme caractéristique

Proposition 2.9.

- Soit E un K-ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$
  Si χ_u est scindé à racines simples, u est diagonalisable.
- Soit $A \in M_n(K)$ et χ_A scindé à racines simples
  Alors A est diagonalisable.

Proposition 2.10. Soit E un K-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u
On note α l'ordre de λ comme racine de χ_u : multiplicité algébrique de λ comme valeur propre de u
On note β la dimension de $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{ Id })$: multiplicité géométrique de λ
Alors $\boxed{1 \leq \beta \leq \alpha}$

Théorème 2.11. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E K-ev de dim finie et $\mathrm{Sp}\, u = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ avec λ_i 2 à 2 distincts.
Pour $1 \leq i \leq r$ on note :
$\beta_i = \dim \ker(u - \lambda \text{ Id })$: multiplicité géométrique
α_i l'ordre de λ_i comme racine de χ_u : multiplicité algébrique
Alors

$$\boxed{u \text{ diagonalisable } \iff \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \forall i \in [\![1, r]\!],\ \beta_i = \alpha_i \end{cases}}$$

Définition 2.12.
Diagonaliser un endomorphisme c'est trouver une base de vecteurs propres et les valeurs propres associés.
diagonaliser une matrice A c'est trouvé $P \in GL_n(K)$ et $D \in D_n(K)$ tels que $P^{-1}AP = D$

Proposition 2.13. Si $C_1, ..., C_n$ sont une base de vecteurs propres pour A et $AC_i = \lambda_i C_i$
Si

$$P = (C_1 \mid \cdots \mid C_n) = \mathrm{Mat}\,(\text{ b.c. }, (C_1 \mid \cdots \mid C_n))$$

Alors

$$P^{-1}AP = \underset{(C_1,...,C_n)}{\mathrm{Mat}}(u_A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

3 Exercices classiques ($1^{\text{ère}}$ série)

3.1 Diagonalisation simultanée

Soit E un K-ev de dimension finie.

1. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ d'éléments co-diagonalisables ie. qui admettent une base commune de diagonalisation.
   Montrer que les éléments de A commutent.
2. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables avec $u \circ v = v \circ u$
   Montrer que u et v sont co-diagonalisables.
3. Soit $u_1, ..., u_p \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables commutant 2 à 2
   Montrer que $u_1, ..., u_p$ sont co-diagonalisables.
4. Montrer que c'est le cas pour $A \in \mathcal{L}(E)$ formé d'éléments diagonalisables, commutant 2 à 2
5. Soit $A, B \in M_n(K)$ diagonalisables. Si $AB = BA$ montrer qu'il existe $P \in GL_n(K)$ tel que
   $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.

3.2 Semi-simplicité des endomorphismes diagonalisables

Soit E un K-ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

1. Montrer que tout système libre de vecteurs propres de u se complète en une base de vecteurs propres.
2. Soit $F \in E$ un sev stable par u
   Montrer que F possède un supplémentaire stable par u (semi-simplicité)
3. Décrire les sous-espaces stables de E par u
   À quelle condition sont-ils en nombre fini ? (avec K infini)

3.3 Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

1. Soit E un K-ev de dim finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable,
   $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$ avec $\lambda_i \in K$ 2 à 2 distincts, $m_i \geq 1$
   Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{i=1}^{r} m_i^2$, décrire les éléments de $\mathcal{C}(u)$ (commutant de u)
2. Soit $A \in M_n(K)$ diagonalisable et $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$
   (a) Montrer que $\dim \mathcal{C}(A) = \sum_{i=1}^{r} m_i^2$
   (b) Montrer que $\mathcal{C}(A) = K[A] \iff r = n \iff \chi_A$ scindé à racines simples

4 Endomorphismes trigonalisables

4.1 Généralités

Définition 4.1.

- Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$
  On dit que u est trigonalisable s'il existe $\mathcal{B}$ base de E avec $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ triangulaire supérieure.
- Soit $A \in M_n(K)$
  On dit que A est trigonalisalbe si u_A l'est.

Proposition 4.2. Soit $A \in M_n(K)$
Alors A trigonalisable $\iff$ A semblable à une matrice triangulaire

Proposition 4.3. Soit E un K-ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ Alors

$$\boxed{u \text{ trigonalisable} \iff A \text{ trigonalisable}}$$

Proposition 4.4.

- Soit E un K-ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres comptées avec multiplicités et $P \in K[X]$
  Alors $P(u)$ est trigonalisable et $P(\lambda_1), ..., P(\lambda_n)$ sont ses valeurs propres comptées avec multiplicité.
- Soit $A \in M_n(K)$ trigonalisable, $\chi_A = \prod\limits_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$ et $P \in K[X]$
  Alors $P(A)$ est trigonalisable et $P(\lambda_1), ..., P(\lambda_n)$ sont ses valeurs propres comptés avec multiplicité.

4.2 Le théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 4.5 (Théorème de Cayley-Hamilton)**.**

- Soit E un K-ev de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$
  Alors
  $$\boxed{\chi_u(u) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mu_u \mid \chi_u}$$
  En particulier $\boxed{\deg \mu_u \leq n}$
- Soit $A \in M_n(K)$
  Alors
  $$\boxed{\chi_A(A) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mu_A \mid \chi_A}$$
  Et $\boxed{\deg \mu_A \leq n}$

4.3 Caractérisation des endomorphismes trigonalisables

Théorème 4.6. Soit $A \in M_n(K)$
Les 4 conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est trigonalisable.

(ii) χ_A est scindé.

(iii) μ_A est scindé.

(iv) Il existe $Q \neq 0$ dans $K[X]$ scindé avec $Q(A) = 0$

Corollaire 4.7. Soit E un K-ev de dim finie et $u \in \mathcal{L}(E)$
Les 4 conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est trigonalisable.

(ii) χ_u est scindé.

(iii) μ_u est scindé.

(iv) u admet un polynôme annulateur scindé.

Corollaire 4.8.

- Toute matrice carrée complexe est trigonalisable.
- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie est trigonalisable.

Proposition 4.9.

- Soit E un K-ev de dim finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$
  Alors
  $$u \text{ nilpotent } \iff \chi_u = X^n \iff u \text{ trigonalisable et } \operatorname{Sp}(u) = \{0\}$$
  Dans ces conditions il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que
  $$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$$
  et $\boxed{u^n = 0}$
- Soit $A \in M_n(K)$
  Alors
  $$A \text{ nilpotente } \iff \chi_A = X^n \iff \begin{cases} A \text{ trigonalisable} \\ \operatorname{Sp}(A) = \{0\} \end{cases}$$
  Dans ces conditions A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$ et $A^n = 0$

5 Sous-espace caractéristique

5.1 Présentation

Définition 5.1. Soit E un K-ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, λ un valeur propre de u et α sa multiplicité algébrique (son ordre comme racine de χ_u)
Le sous-espace caractéristique de u associée à λ est
$$\boxed{F_\lambda(u) = \ker\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^\alpha}$$

Théorème 5.2. Soit E un K-ev de dim finie $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ de multiplicité algébrique α
et racine d'ordre p de μ_u
Alors
$$F_\lambda(u) = \ker\left(u - \mathrm{Id}\right)^\alpha = \ker\left(u - \mathrm{Id}\right)^p = \ker\left(u - \mathrm{Id}\right)^n$$
De plus p est le rang à partir duquel les noyaux itérés de $u - \lambda\mathrm{Id}$ stationnent.

Théorème 5.3. Soit E un K-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable et
$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec les $\lambda_i \in K$ 2 à 2 différents et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$
Alors
$$\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}}$$
De plus $\boxed{\dim F_{\lambda_i}(u) = \alpha_i}$

5.2 Théorème de réduction par sous-espace caractéristique

Théorème 5.4 (Théorème de réduction par sev caractéristique). Soit E un K-ev de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable et $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec les $\lambda_i \in K$ 2 à 2 distincts et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}} = \begin{pmatrix} \boxed{T_1} & & & (0) \\ & \boxed{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{T_r} \end{pmatrix}$$

avec

$$T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

de taille α_i pour tout $i \in [\![1, r]\!]$

5.3 Réduction des matrices de taille 2

Soit $A \in M_2(K)$ trigonalisable donc $\chi_A = (X - \lambda)(X - \mu)$ avec $\lambda, \mu \in K$

- Si $\lambda \neq \mu$ alors χ_A est scindé à racines simples.
  A est diagonalisable et A semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$
- Si $\lambda = \mu$ alors $\chi_A = (X - \lambda)^2$ et
  A est diagonalisable $\iff A = \lambda I_2$
  Si A n'est pas diagonalisable alors A est trigonalisable et A est semblable $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Si $K = \mathbb{R}$ et $\chi_A = (X - \rho e^{i\theta})(X - \rho e^{-i\theta})$
Alors A est semblable sur $\mathbb{R}$ à $\rho R_\theta = \rho \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

6 Exercices classiques

6.1 Trigonalisation simultanée

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dim finie n et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ avec $u \circ v = v \circ u$

1. Montrer que u et v possèdent un vecteur propre commun.
2. Montrer que u et v sont cotrigonalisables (il existe une base commune dans laquelle les matrices de u et v sont triangulaires supérieures.
3. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$
   Montrer que $AB = BA \implies \exists P \in GL_n(\mathbb{C}), P^{-1}AP \in T_n(\mathbb{C})$ et $P^{-1}BP \in T_n(\mathbb{C})$
   La réciproque est-elle vraie ?

6.2 Caractérisation de matrices nilpotents avec la trace

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\, A^2 = ... = \mathrm{Tr}\, A^n = 0$
Montrer que A est nilpotente.

6.3 Sous-espaces stables

Soit $n \geq 1$

1. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors A possède un sec stable de dimension k avec $k \in [\![0, n]\!]$ quelconque.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$
   Montrer que A possède une droite ou un plan stable.
3. Soit $A \in M_n(K)$ et H un hyperplan de K^n. Montrer que :
   H stable par $A \iff$ Il existe L un vecteur propre de A^T tel que $L^T X = 0$ est une équation de H

6.4 Réduction de matrices par blocs

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ -1 & 2A \end{pmatrix}$
Montrer que A diagonalisable $\iff$ B diagonalisable